

УДК 504.43/45.06:(556.535:004.01)

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ДИФфуЗНОГО СТОКА КОНСЕРВАТИВНЫХ ЗАГРЯЗНИТЕЛЕЙ ДЛЯ МАЛЫХ РАВНИННЫХ РЕК

В.Ю. Филимонов, О.В. Ловцкая

*Институт водных и экологических проблем СО РАН, Барнаул,**E-mail: vyfilimonov@rambler.ru, lov@iwep.ru*

В работе рассматривается метод оценки полного массового расхода консервативных загрязнителей с использованием асимптотического представления решения уравнения адвекции-диффузии в предположении малости обратной величины числа Пекле. На основе метода асимптотических сращиваний соответствующей сингулярно возмущенной задачи получена алгебраическая связь между концентрацией загрязнителя, величиной его полного массового расхода и числом Пекле. Точный расчет прямой задачи основывался на аналитическом представлении исходных тестовых функций источника для уравнения адвекции-диффузии. Расчет обратной задачи проводился методом глобальной оптимизации для определения абсолютного минимума соответствующего функционала качества. Установлено удовлетворительное соответствие результатов решения обратной и прямой задач, при этом отклонение расчетных параметров от их точных значений не превосходит несколько процентов. Для учета возможных случайных отклонений значений концентраций загрязнителя от точного решения использовался метод Монте-Карло. Установлено, что в этом случае расчет также дает устойчивые результаты, и отклонения искомых параметров от их точных значений не превышает десяти процентов. Предложенная методика дает корректные результаты с точки зрения оценки величин рассматриваемых параметров.

Ключевые слова: уравнение адвекции-диффузии; число Пекле; асимптотическое решение; обратная задача; глобальная оптимизация; метод Монте-Карло.

DOI: 10.24412/2410-1192-2025-17804

Дата поступления: 1.08.2025. Принята к печати: 2.09.2025

Химическое загрязнение водных объектов является одной из глобальных экологических проблем современности. Наибольшую опасность для качества поверхностных вод представляет диффузный сток, влияние которого особенно значительно для малых рек [Диффузное..., 2020].

Неконтролируемый характер диффузного стока с больших территорий [Коронкевич, Долгов, 2017] обуславливает необходимость применения математического моделирования как основного способа оценки расходных характеристик загрязнителей. В рамках классического подхода эта оценка производится путем решения обратных задач для одномерного уравнения адвекции-диффузии на основе заданных тестовых функций удельного

массового расхода (количества загрязнителя, поступающего в водоток на единицу длины за единицу времени) [Boano et al., 2005; Badia, Hamdi, 2007; Jun et al., 2007; Sousa, Roberty, 2012; Andrieu, Badia, 2012; Kulbay et al., 2017] и верификации результатов путем сравнения с исходными тестовыми функциями.

Ключевым параметром в одномерной модели адвекции-диффузии является число Пекле, которое в данной постановке задачи определяется как отношение характерного времени продольной диффузии к времени добегающего на исследуемом участке.

В цитированных работах число Пекле обычно считается заданным. Однако для малых рек оно, оставаясь конечным, может достигать значительных величин – от де-

сятков до сотен и более – в зависимости от протяжённости участка. Эта вариативность определяется коэффициентом продольной дисперсии [Tayfur, Singh, 2005; Pannone, 2012; Pannone et al., 2018]. Таким образом, величина, обратная числу Пекле, может служить малым параметром в уравнении адвекции-диффузии, что позволяет использовать асимптотические приближения при его решении [Chaikovskii, Zhang, 2021].

Следует отметить, что использование априорно заданного значения числа Пекле при обработке натурных данных может привести к ошибкам, поскольку расчетные формулы для коэффициента продольной дисперсии не всегда согласуются с экспериментом [Kashefirou, Falconer, 2002]. В связи с этим более корректным представляется расчет числа Пекле непосредственно по распределению концентрации загрязнителя, определенной по результатам натурных измерений.

Наряду с удельным расходом, существенной характеристикой является полный расход загрязнителя, определяющий его общее поступление в водоток на рассматриваемом участке в единицу времени. Будучи интегральной величиной и монотонно возрастая по координате, данный показатель упрощает вычислительные процедуры и ограничивает класс исследуемых функций.

Для обеспечения надежности решения обратных задач по восстановлению расходных характеристик загрязнителей часто используется рандомизация (внесение случайных отклонений) модельных данных концентрации. В отличие от распространенного подхода с однократной рандомизацией, исходящего из гипотезы о нормальном распределении ошибок [Kulbay et al., 2017], более устойчивые результаты может дать метод Монте-Карло, основанный на многократном статистическом моделировании отклонений.

На основании вышеизложенного, целью настоящего исследования является разработка асимптотического метода восстановления полного массового расхода

загрязнителя и числа Пекле по данным о пространственном распределении концентрации. Метод основан на применении процедуры асимптотических сращиваний сингулярно возмущенной задачи для уравнения адвекции-диффузии.

Материалы и методы

В работе [Филимонов, Ловцкая, 2025] показано, что для анализа установившихся течений удобно анализировать стационарное уравнение адвекции-диффузии в обезразмеренной форме:

$$\frac{d\theta}{dz} - \frac{1}{\alpha} \frac{d^2\theta}{dz^2} = \tilde{\varphi}(z), \quad (1)$$

где $z = x/L$, $\theta = (c - c_A)/c_A$, $\alpha = VL/E$, $\tilde{\varphi}(z) = L\varphi(z)/Qc_A$. Здесь x – координата, L – длина рассматриваемого участка, c – концентрация загрязнителя, c_A – концентрация загрязнителя в начале участка, α – число Пекле, V – скорость течения на участке, E – коэффициент продольной дисперсии, $\varphi(z)$ – удельный массовый расход загрязнителя, Q – расход воды на рассматриваемом участке. Предполагается, что скорости течения и расходы воды меняются незначительно. Граничные условия к уравнению (1) определяются измеренными (сгенерированными) значениями на границах:

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(1) = \theta_1 \quad (2)$$

Полный массовый расход:

$$\tilde{\Phi}(z) = \int_0^z \tilde{\varphi}(z) dz \quad (3)$$

Целью решения обратной задачи является определение распределения полного массового расхода (3) по известному распределению концентрации $\theta(z)$ и оценка числа Пекле в предположении малости его обратной величины, т.е. параметра $\varepsilon = 1/\alpha$.

Прямая задача

Для решения прямой задачи вводятся в рассмотрение следующие тестовые функции для уравнения (1):

$$\tilde{\varphi}(z) = 0.2 + 0.3z - 0.25z^2 \quad (4)$$

$$\tilde{\varphi}(z) = 0.04e^{3z} + 0.16 \quad (5)$$

Тестовые функции выбирались из следующих соображений. Функция (4) определяет слабое изменение удельного массового расхода, что характерно для гидрохимически однородных участков водосборов. Функция (5), напротив, определяет быстрый рост удельного расхода. Такие участки являются потенциально опасными и требуют детального изучения.

Распределение характерных величин как результат расчета задачи (1) – (3) для указанных тестовых функций представлены на рисунке 1. Расчет проводился для $\theta_1 = 1$, $\alpha = 10$.

Как следует из графиков 1 и 2 (рис. 1б), распределение концентрации $\theta(z)$ характеризуется быстрым ростом в окрестности правой границы. При этом, несмотря на существенное различие в поведении тестовых функций (4), (5), распределения концентраций отличаются незначительно, что характерно для некорректной обратной задачи.

Результаты и обсуждение

Метод асимптотических сращиваний

Как правило, для малых рек величина числа Пекле принимает большие значения [Tayfur, Singh, 2005; Pannone et al.; 2018], и уравнение (1) характеризуется наличием малого параметра $\varepsilon = 1/\alpha$ при второй про-

изводной. Задачи такого класса относятся к сингулярно возмущенным и подробно изучены в математической литературе [Bender; Orszag, 1999; Verhulst, 2005]. Для решения такого рода задач разработан весьма эффективный метод, который определяется как метод асимптотических сращиваний [Найфэ, 1984].

На основании [Найфэ, 1984] рассмотрим внутреннее разложение θ^i в (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{d\theta^i}{dz} = \tilde{\varphi}(z) \quad (6)$$

Интегрирование (6) дает:

$$\theta^i = \tilde{\Phi}(z) + C \quad (7)$$

Очевидно, на основании (2), (3), на левой границе $z = 0$, $C = 0$. Однако внутреннее разложение (7) не удовлетворяет условию на правой границе (2): $\theta^i(1) = \theta_1 \neq \tilde{\Phi}(1)$. Рассмотрим внешнее разложение θ^o . Введем:

$$\xi = \frac{1-z}{\varepsilon}; \quad z = 1 - \varepsilon\xi \quad (8)$$

Тогда:

$$\frac{d^2\theta^o}{d\xi^2} + \frac{d^2\theta^o}{d\xi} = -\varepsilon\tilde{\varphi}(z) \quad (9)$$

В нулевом приближении ($\varepsilon \rightarrow 0$), общее решение (9) имеет вид:

$$\theta^o = a + be^{-\xi} \quad (10)$$

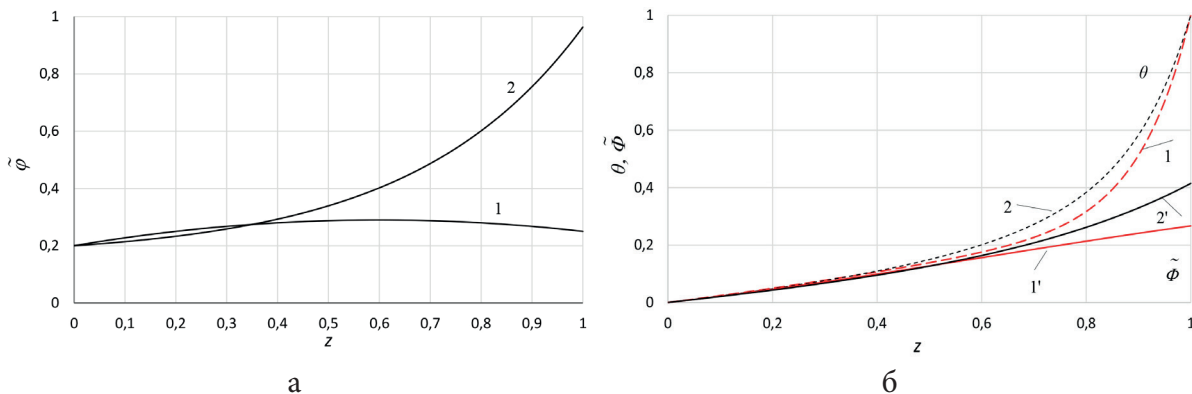


Рис. 1. Распределение характерных величин как результат решения прямой задачи:
(а) тестовые функции: 1 – функция (4), 2 – функция (5); (б) соответствующие распределения концентрации $\theta(z)$ (1, 2) и полного массового расхода $\tilde{\Phi}(z)$ (1', 2'). Расчет проводился для $\theta_1 = 1$, $\alpha = 10$. Число расчетных точек $k=50$

Fig. 1. Distribution of characteristic values as a result of solving the direct problem:
(a) test functions: 1 – function (4), 2 – function (5); (b) corresponding distributions of concentration $\theta(z)$ (1, 2) and total mass flow rate $\tilde{\Phi}(z)$ (1', 2'). The calculation was performed for $\theta_1 = 1$, $\alpha = 10$. Number of calculation points $k=50$

С учетом (8) на правой границе $\xi = 0$. Тогда, $a + b = \theta_1$, и получим:

$$\theta^o = a + (\theta_1 - a)e^{-\xi} \quad (11)$$

Перейдем к прежним переменным:

$$\theta^i = \tilde{\Phi}(1 - \varepsilon\xi) \quad (12)$$

$$\theta^o = a + (\theta_1 - a)e^{-(1-z)/\varepsilon} \quad (13)$$

Полагая z, ξ фиксированными, устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, и срачивая (12), (13) получим:

$$a = \tilde{\Phi}(1) \quad (14)$$

Выражение (14) определяет общую часть разложения $(\theta^o)^i$. Тогда, согласно [Найфэ, 1984], составное разложение:

$$\theta^c = \theta^o + \theta^i - (\theta^o)^i \quad (15)$$

Окончательно:

$$\theta = \tilde{\Phi}(z) + [\theta_1 - \tilde{\Phi}(1)]e^{-(1-z)/\varepsilon} \quad (16)$$

Зависимость (16) позволяет установить алгебраическую связь между концентрацией загрязнителя и полным массовым расходом для малых значений параметра ε в первом приближении. В данном случае можно говорить о поправке на диффузию, которая определяется вторым слагаемым в (16).

Целью решения обратной задачи являлось определение неизвестного распределения $\tilde{\Phi}(z)$ и величины $\alpha = 1/\varepsilon$ по заданному (сгенерированному) профилю концентрации, а также величины полного массового расхода на всем участке $\tilde{\Phi}(1)$. Для этого искомая зависимость $\tilde{\Phi}(z)$ в уравнении (16) представлялась в виде полинома степени m :

$$\tilde{\Phi}(z) = \sum_{n=1}^m c_n z^n \quad (17)$$

Неизвестные коэффициенты c_n в представлении (17) и неизвестный параметр ε определялись из условий минимизации функционала качества [Dennis, Schnabel, 1987; Global..., 2020; Nocedal, Wright, 2006] (метод глобальной нелинейной оптимизации):

$$S = \sum_{i=1}^k (\theta(z_i, \omega) - \theta_i)^2 \xrightarrow{\omega} \min, \quad (18)$$

где $\theta(z_i, \omega)$ – расчетное значение концентрации на основе (16, 17), θ_i – известное (сгенерированное) значение концентрации, ω – вектор параметров, минимизирующий функционал S . Суммирование в (18) ведется по всем расчетным точкам, число которых в наших расчетах равно $k=50$. Для определения неизвестных параметров использовался математический пакет MatLab MathWorks Inc. с расширением Global Optimization Toolbox [Global..., 2020]. Глобальный минимум выбирался из локальных минимумов, достигнутых на наборе из 100 случайных начальных точек, сгенерированных функцией MultiStart. Для определения локальных минимумов использовался алгоритм нелинейной оптимизации без ограничений Левенберга-Марквардта [Dennis, Schnabel, 1987; Nocedal, Wright, 2006].

В качестве иллюстрации на рисунке 2а представлены результаты расчета распределения полного массового расхода для точного решения (рис. 1) и соответствующие распределения, полученные минимизацией функционала (18) с использованием метода глобальной оптимизации для тестовой функции 1. Расчет проводился для первой степени полинома (17) ($m=1$). На рисунке 2б построены изолинии сечения поверхности функционала качества (18) для определения искомых параметров. Как следует из рисунка 2б, абсолютный минимум на диаграмме наблюдается вполне отчетливо.

В таблице 1 приведены результаты расчета полного массового расхода и числа Пекле для рассматриваемых функций. Рассматривались различные степени полинома (17). Как следует из таблицы, с ростом степени полинома наблюдается приближение расчетных значений к точным. Для функции 1 дальнейший рост степени приводит к различию по отношению к точному значению на уровне долей процента, для функции 2 полином, например, 5-й степени дает отклонение от точных значений на уровне процента.

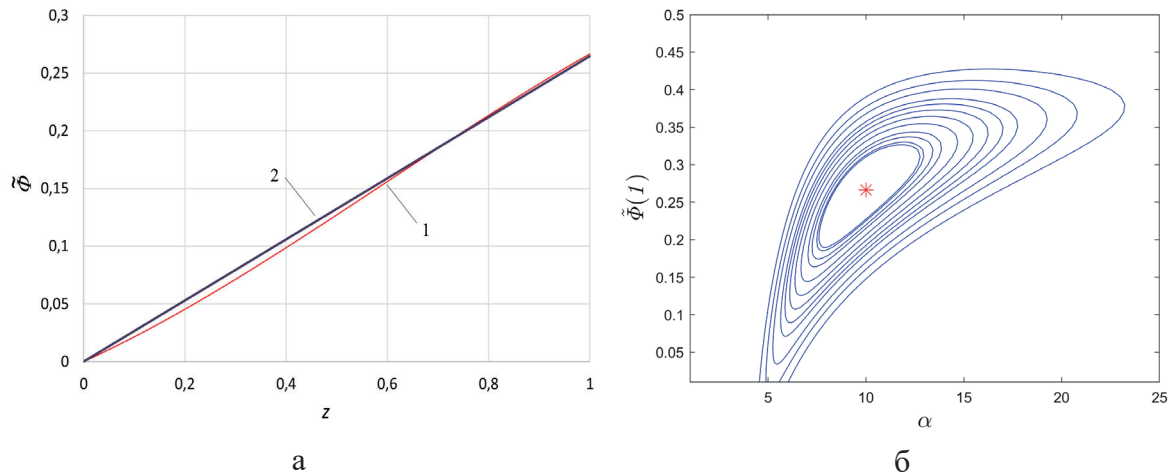


Рис. 2. Иллюстрация применения метода глобальной оптимизации:

(а) Распределение полного массового расхода для функции 1. 1 – точное решение (рис. 1б), 2 – метод глобальной оптимизации; (б) Изолинии сечения поверхности функционала качества (18)

Fig. 2. Illustration of the application of the global optimization method:

(a) Distribution of the total mass flow rate for function 1. 1 – exact solution (Fig. 1b), 2 – global optimization method; (b) Isolines of the cross-section of the quality functional surface (18)

Таблица 1

Значения расчетных параметров, полученных с использованием метода глобальной оптимизации при $\alpha = 10$ для разных степеней полинома (17)

Table 1

Values of the calculated parameters obtained using the global optimization method for $\alpha = 10$ different degrees of the polynomial (17)

Функции	Функция 1			Функция 2		
	степени полинома			степени полинома		
Коэффициенты	1	2	3	1	2	3
α	9.7902	10.2897	9.9981	7.2951	8.6748	9.4605
c_1	0.2647	0.2388	0.2246	0.2604	0.1935	0.2226
c_2		0.0564	0.1261		0.1834	0.0372
c_3			-0.0843			0.1931
$\tilde{\Phi}(1)$ расчетное	0.2647	0.2952	0.2664	0.2604	0.3769	0.4529
$\tilde{\Phi}(1)$ точное	0.267			0.414		

Таким образом, предложенная методика на основе формулы (16) в сочетании с методом глобальной оптимизации (17) дает вполне удовлетворительные результаты с точки зрения оценки искомых параметров. Однако следует иметь в виду наличие случайных отклонений от значений концентраций, имитирующих реальные измерения. Для учета такого рода отклонений предложено использовать метод Монте-Карло.

Рандомизация. Метод Монте-Карло

Рандомизация (задание случайных отклонений) проводилась следующим образом. Каждой точке $\theta_i(z_i)$ точного решения для распределения концентрации (рис. 1б) был присвоен интервал $\Delta\theta_i = \pm\delta$. Внутри заданного интервала значение концентрации задавалось случайным образом с помощью генератора случайных чисел. Реализация метода Монте-Карло основывалась на

рассмотрении N различных наборов случайных точек в заданном интервале и вычислении средних значений соответствующих параметров [Strijov, Weber, 2010].

В таблице 2 представлены результаты расчета искомых параметров α , $\tilde{\Phi}(1)$ для рандомизированных и нерандомизированных значений концентраций загрязнителя. Расчет проводился для условий рандомизации $N = 100$, $\delta = \pm 0.05$.

Как следует из таблицы, отклонение рассчитанных в результате рандомизации параметров от точных значений не превышает 10%. Таким образом, полученные результаты можно считать устойчивыми относительно рандомизации в указанном интервале. Расчет для больших значений параметра α приводит к аналогичным результатам. Таким образом, можно предположить, что предложенный метод может быть использован для оценки суммарного массового расхода консервативных загрязняющих веществ и числа Пекле в малых реках.

Заключение

В представленной работе предложен метод оценки полного массового расхода загрязняющих веществ и неизвестного числа Пекле на исследуемом участке водотока. Предложенный подход основан на асимптотическом представлении решения уравнения адвекции-диффузии в предпо-

ложении больших значений числа Пекле. Использование метода асимптотических сращиваний для сингулярно возмущенной задачи дает возможность установления алгебраической связи между распределением концентрации загрязнителя и его полным массовым расходом. Распределение удельного массового расхода представлялось в виде тестовых функций, заданных аналитически, что позволило получить точное решение для прямой задачи при заданной величине числа Пекле. Применение метода глобальной оптимизации для решения обратной задачи позволило определить неизвестные коэффициенты полинома, которым представлялось распределение полного массового расхода загрязнителя, и соответствующее число Пекле. Установлено, что полученные результаты находятся в удовлетворительном соответствии с точными результатами расчета прямой задачи. Для учета возможных случайных отклонений от точного решения использовался метод Монте-Карло. Выяснено, что применение метода дает устойчивые результаты в заданных границах изменения концентрации, и отклонение расчетных параметров от их точных значений не превышает 10%, что позволяет говорить о возможности оценки полного массового расхода загрязнителя на исследуемом участке водотока и величины числа Пекле.

Таблица 2

Параметры обратной задачи для нерандомизированного ($\delta = 0$) и рандомизированного ($\delta = 0.05$) распределения при $N=100$

Table 2

Parameters of the inverse problem for non-randomized ($\delta = 0$) and randomized ($\delta = 0.05$) distributions for $N=100$

Расчет	Функция 1		Функция 2	
	α	$\tilde{\Phi}(1)$	α	$\tilde{\Phi}(1)$
Точные значения	10	0.267	10	0.414
$\delta = 0$	9.998	0.266	9.460	0.453
$\delta = 0.05$	10.798	0.30	10.56	0.462

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interests: The authors declare no conflict of interests.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВЭП СО РАН.

Список литературы

Диффузное загрязнение водных объектов: Проблемы и решения. М.: РАН, 2020. 512 с.

Коронкевич Н.И., Долгов С.В. Сток с водосбора как источник диффузного загрязнения рек // Вода и экология: проблемы и решения. 2017. № 4(72). С. 103–110. doi: 10.23968/2305-3488.2017.22.4.103-110

Найфэ А.Н. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

Филимонов В.Ю., Ловцкая О.В. Полуэмпирический метод расчета диффузного стока консервативных загрязнителей на участках малых равнинных рек: Сообщение 1. Восстановление полного массового расхода загрязнителей // Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2025. № 1. С. 5–23. doi: 10.35567/19994508-2025-1-5-23

Andrie M., Badia A.E. Identification of multiple moving pollution sources in surface waters or atmospheric media with boundary observations // Inverse Probl. 2012. Vol. 28. P. 1–22.

Badia A.E., Hamdi A. Inverse source problem in an advection–dispersion–reaction system: application to water pollution // Inverse Probl. 2007. Vol. 23. P. 2103–2120.

Bender C.M.; Orszag S.A. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory. New York: Springer-Verlag, 1999. 605 p.

Boano F., Revelli R., Ridolfi L., Source identification in river pollution problems: A geostatistical approach // Water Resour. Res. 2005. Vol. 41. P. 1–13.

Chaikovskii D., Zhang Y. Convergence analysis for forward and inverse problems in singularly perturbed time-dependent reaction-advection-diffusion equations // J. Comput. Phys. 2021. Vol. 470. P. 111609. doi: 10.1016/j.jcp.2021.111609

Dennis J.E., Schnabel R.B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. New York: SIAM Publ., 1987. 395 p.

Global Optimization Toolbox. User's Guide. The MathWorks, Inc., 2020. 877 p.

Jun K.S., Kang J.W., Lee K.S. Simultaneous estimation of model parameters and diffuse pollution sources for river water quality modelling // Water Sci. Technol. 2007. Vol. 56, no. 1. P. 55–162.

Kashefipour S.M., Falconer R.A. Longitudinal dispersion coefficients in natural channels // Water Res. 2002. Vol. 36 (6). P. 1596–1608.

Kulbay M., Mukanova B., Sebu C. Identification of separable sources for advection-diffusion equations with variable diffusion coefficient from boundary measured data // Inverse Probl. Sci. Eng. 2017. Vol. 25, no. 2. P. 279–308. doi: 10.1080/17415977.2016.1160396

Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. New York: Springer, 2006. 651 p.

Pannone M. Longitudinal dispersion in river flows characterized by random large-Scale bed irregularities: first-order analytical solution // Journal of Hydraulic Engineering. 2012. Vol. 138, Is. 5. P. 410–411.

Pannone M., Mirauda D., Vincenzo A.D. Molino B. Longitudinal dispersion in straight open channels: Anomalous breakthrough curves and first-order analytical solution for the depth-averaged concentration // Water. 2018. Vol. 10 (4). P. 478. doi: 10.3390/w10040478

Sousa D.M., Roberty N.C. An inverse source problem for the stationary diffusion-advection-decay equation // *Inverse Probl. Sci. Eng.* 2012. Vol. 20, no. 7. P. 891–915. doi: 10.1080/17415977.2011.609466

Strijov V., Weber G.W., Nonlinear regression model generation using hyperparameter optimization // *Computers & Mathematics with Applications*. 2010. Vol. 60 (4). P. 981–988. doi: 10.1016/j.camwa.2010.03.021

Tayfur G., Singh V.P., Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams by artificial neural network. *Journal of Hydraulic Engineering*. 2005. Vol. 131 (11). P. 991–1000. doi: 10.1061/(asce)0733-9429(2005)131:11(991)

Verhulst F. *Methods and applications of singular perturbations: Boundary layers and multiple timescale dynamics*. New York: Springer, 2005. 332 p.

References

Diffuznoe zagrizhenie vodnyh ob'ektov: Problemy i reshenija [Diffuse pollution of water bodies: Problems and solutions]. M.: RAN, 2020. 512 p. (in Russian).

Koronkevich N.I., Dolgov S.V. Stok s vodosbora kak istochnik diffuznogo zagriznenija rek [The runoff from a watershed as a source of diffuse river pollution] // *Voda i jekologija: problemy i reshenija* [Water and ecology]. 2017. Vol. 72 (4). P. 103–110. (in Russian). doi: 10.23968/2305-3488.2017.22.4.103-110

Nayfen A. H. *Perturbation Methods*. New-York: Wiley-VCH, 1973, 425 p.

Filimonov V.Y., Lovtskaya O.V. Semi-empirical method for calculating diffuse runoff of conservative pollutants in small rivers: 1. Method for reconstructing the total mass flow rate. *Water Sector of Russia: Problems, Technologies, Management*. 2025. No. 1. P. 5–23. doi: 10.35567/19994508-2025-1-5-23

Andrieu M., Badia A.E. Identification of multiple moving pollution sources in surface waters or atmospheric media with boundary observations // *Inverse Probl.* 2012. Vol. 28. P. 1–22.

Badia A.E., Hamdi A. Inverse source problem in an advection–dispersion–reaction system: application to water pollution // *Inverse Probl.* 2007. Vol. 23. P. 2103–2120.

Bender C.M.; Orszag S.A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. New York: Springer-Verlag, 1999. 605 p.

Boano F., Revelli R., Ridolfi L., Source identification in river pollution problems: A geostatistical approach // *Water Resour. Res.* 2005. Vol. 41. P. 1–13.

Chaikovskii D., Zhang Y. Convergence analysis for forward and inverse problems in singularly perturbed time-dependent reaction-advection-diffusion equations // *J. Comput. Phys.* 2021. Vol. 470. P. 111609. doi: 10.1061/(asce)hy.1943-7900.0000537

Dennis J.E., Schnabel R.B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. New York: SIAM Publ., 1987. 395 p.

Global Optimization Toolbox. User's Guide. The MathWorks, Inc., 2020. 877 p.

Jun K.S., Kang J.W., Lee K.S. Simultaneous estimation of model parameters and diffuse pollution sources for river water quality modelling // *Water Sci. Technol.* 2007. Vol. 56, no. 1. P. 55–162.

Kashefipour S.M., Falconer R.A. Longitudinal dispersion coefficients in natural channels // *Water Res.* 2002. Vol. 36 (6). P. 1596–1608.

Kulbay M., Mukanova B., Sebu C. Identification of separable sources for advection-diffusion equations with variable diffusion coefficient from boundary measured data // *Inverse Probl. Sci. Eng.* 2017. Vol. 25, no. 2. P. 279–308. doi: 10.1080/17415977.2016.1160396

Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. New York: Springer, 2006. 651 p.

Pannone M. Longitudinal dispersion in river flows characterized by random large-Scale bed irregularities: first-order analytical solution // Journal of Hydraulic Engineering. 2012. Vol. 138, Is. 5. P. 410–411.

Pannone M., Mirauda D., Vincenzo A.D. Molino B. Longitudinal dispersion in straight open channels: Anomalous breakthrough curves and first-order analytical solution for the depthaveraged concentration // Water. 2018. Vol. 10 (4). P. 478. doi: 10.3390/w10040478

Sousa D.M., Roberty N.C. An inverse source problem for the stationary diffusion-advection-decay equation // Inverse Probl. Sci. Eng. 2012. Vol. 20, no. 7. P. 891–915. doi: 10.1080/17415977.2011.609466

Strijov V., Weber G.W., Nonlinear regression model generation using hyperparameter optimization // Computers & Mathematics with Applications. 2010. Vol. 60 (4). P. 981–988. doi: 10.1016/j.camwa.2010.03.021

Tayfur G., Singh V.P., Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams by artificial neural network. Journal of Hydraulic Engineering. 2005. Vol. 131 (11). P. 991–1000. doi: 10.1061/(asce)0733-9429(2005)131:11(991)

Verhulst F. Methods and applications of singular perturbations: Boundary layers and multiple timescale dynamics. New York: Springer, 2005. 332 p.

ASYMPTOTIC METHOD FOR DIFFUSE RUNOFF ESTIMATION OF CONSERVATIVE POLLUTANTS FOR SMALL PLAIN RIVERS

V.Yu. Filimonov, O.V. Lovtskaya

Institute for Water and Environmental Problems SB RAS, Barnaul,

E-mail: vyfilimonov@rambler.ru, lov@iwep.ru

The paper considers a method for estimating the total mass flow rate of conservative pollutants using an asymptotic representation of the advection-diffusion equation solution under the assumption of the smallness of the Peclet number reciprocal value. Based on the method of matched asymptotic of the corresponding singularly perturbed problem, an algebraic relationship between the concentration of the pollutant, its total mass flow rate and the Peclet number was obtained. The exact calculation of the direct problem was based on the analytical representation of the initial test source functions for the advection-diffusion equation. The calculation of the inverse problem was carried out based on the global optimization method when determining the absolute minimum of the corresponding quality functional. A satisfactory agreement between the results of solving the inverse and direct problems has been established, while the deviation of the calculated parameters from their exact values does not exceed several percent. To take into account possible random deviations of pollutant concentration values from the exact solution, the Monte-Carlo method was used. It has been established that in this case, the calculation also yields stable results, and the deviations of the sought parameters from their exact values do not exceed ten percent. The proposed method yields correct results in terms of estimating the values of the parameters under consideration.

Keywords: advection-diffusion equation; Peclet number; asymptotic solution; inverse problem; global optimization; Monte-Carlo method.

Received August 1, 2025. Accepted: September 2, 2025

Сведения об авторах

Филимонов Валерий Юрьевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института водных и экологических проблем СО РАН. Россия, 656038, г. Барнаул, Молодежная, д. 1, ИВЭП СО РАН. ORCID: 0000-0003-0229-7058. E-mail: vyfilimonov@rambler.ru.

Ловцкая Ольга Вольфовна – старший научный сотрудник Института водных и экологических проблем СО РАН. Россия, 656038, г. Барнаул, Молодежная, д. 1, ИВЭП СО РАН. ORCID: 0000-0002-3942-1350. E-mail: lov@iwep.ru.

Information about the authors

Filimonov Valery Yur'evich – DrS in Physics and Mathematics, Chief Researcher of the Institute for Water and Environmental Problems SB RAS (IWEP SB RAS). 1, Molodezhnaya St., 656038 Barnaul, Russia. ORCID: 0000-0003-0229-7058. E-mail: vyfilimonov@rambler.ru.

Lovtskaya Olga Vol'fovna – Senior Researcher of the Institute for Water and Environmental Problems SB RAS (IWEP SB RAS). 1, Molodezhnaya St., 656038 Barnaul, Russia. ORCID: 0000-0002-3942-1350. E-mail: lov@iwep.ru.